www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Les problèmes 1 et 2 sont indépendants et doivent être obligatoirement traités.

PROBLEME 1 (14 points) Objectif du problème

Le problème est consacré à l'étude des solutions réelles de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E) \quad x(2-x)y' + (1-x)y - 1 = 0$$

Dans la partie I, on détermine les solutions de (E) développables en série entière. Dans la partie II, on détermine les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]0,2[$, $]-\infty,0[$ et $]2,+\infty[$ où le coefficient de y' ne s'annule pas. Enfin dans la partie III, on se propose de chercher s'il existe des solutions de (E) sur l'intervalle $]-\infty,2[$, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ ainsi que sur $\mathbb{R}$.

I

I.1 Détermination d'une série entière solution de (E)

a) En supposant que la fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) dans un intervalle centré en 0, déterminer la valeur de a_0 et les relations liant, pour tout entier n supérieur ou égal à un, les coefficients a_n et a_{n-1}.

b) Déterminer l'unique série entière dont les coefficients vérifient les conditions précédentes.

c) Déterminer le rayon de convergence r de cette série entière.

I.2 Etude de la série numérique de terme général : $W_n = (-r)^n . a_n$

On pose $u_n = r^n a_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

b) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = -\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$ (où $n \geq 1$). En déduire la nature de la suite de terme général $\ln(u_n)$ puis la limite de la suite (u_n).

c) Préciser alors la nature de la série numérique de terme général W_n.

I.3 Etude de la série numérique de terme général : $u_n = (r)^n . a_n$

a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à un, on a : $\frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{n}{n+1}$

b) En déduire, pour tout entier n $u_n \geq \frac{1}{n+1}$

c) Préciser alors la nature de la série numérique de terme général u_n.

d) Déduire alors de ce qui précède qu'il existe une unique fonction f, développable en série entière, sur un intervalle que l'on précisera, qui soit solution de (E) sur cet intervalle.

Tournez la page S.V.P.

II **II.1 Solutions de (E) dans l'intervalle]0,2[**

a) A tout élément x de l'intervalle]0,2[, on associe l'intégrale : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(2-t)}}$

Montrer que cette intégrale converge et admet une limite finie lorsque x tend vers deux. Calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

b) Donner sur l'intervalle]0,2[une expression générale des solutions de l'équation sans second membre associée à (E).
Déterminer sur cet intervalle]0,2[, une expression générale des solutions de l'équation (E).

c) Démontrer qu'il existe une solution ϕ de (E) sur]0,2[et une seule, admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de F .

II.2 Solutions de (E) dans l'intervalle]-∞,0[

a) A tout élément x de]-∞,0[, on associe l'intégrale $G(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t(t-2)}}$

Etudier la convergence de cette intégrale et déterminer G(x).

b) Donner sur l'intervalle]-∞,0[une expression générale des solutions de l'équation sans second membre, puis celle des solutions de E.

c) Démontrer qu'il existe une solution ψ de (E) sur]-∞,0[et une seule, admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de G.

II.3 Solutions de (E) dans l'intervalle]2,+∞[

Déterminer l'expression générale des solutions de (E) sur l'intervalle]2,+∞[.

III

III.1 Etude de (E) sur]-∞,2[

a) Prouver qu'il existe une solution g de (E) sur l'intervalle]-∞,2[et une seule. A cet effet, on prouvera que les restrictions de g, si g existe, aux intervalles]-∞,0[et]0,2[sont respectivement égales aux fonctions ψ et ϕ ; on en déduira l'unicité de g, puis son existence.

b) Montrer que la restriction de g à l'intervalle]-2,+2[est égale à f.

III.2 Etude de (E) sur]0,+∞[

Montrer qu'il existe une solution h et une seule de (E) sur l'intervalle]0,+∞[. A cet effet, on pourra, par exemple, utiliser dans l'équation différentielle (E), le changement de variable
x ---> 2 - x = t. Quelle relation lie les deux fonctions g et h ?

III.3 Etude de (E) sur R

Etudier l'existence éventuelle de solutions de (E) sur R.

Tournez la page S.V.P.

PROBLEME 2 (6 points)

On se propose de construire le développement en série de Fourier d'une fonction 2π-périodique impaire à partir de celui de sa dérivée seconde.

I. Dans cette partie, ϕ désigne une fonction continue sur $]0,\pi[$, à valeurs réelles, admettant des limites finies en 0 et en π.

I.1. a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction h 2π-périodique, à valeurs réelles, impaire, telle que, pour tout x de $]0,\pi[$, $h(x) = \phi(x)$.

b) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction h à l'aide d'intégrales portant sur ϕ.

I.2. a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction g 2π-périodique, paire, à valeurs réelles, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]0,\pi[$ vérifiant $\int_0^{\pi} g(t)\,dt = 0$ et $g' = \phi$ sur $]0,\pi[$.
Expliciter g sur $]0,\pi[$ à l'aide de ϕ.

b) Montrer que g est de classe C^1 par morceaux et comparer g' et h.

c) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction g au moyen de ceux de la fonction h, à l'aide d'une intégration par parties.

I.3. a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction f 2π-périodique, impaire, à valeurs réelles, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable dans $]0,\pi[$ et vérifiant $f' = g$ sur cet intervalle.

b) Prouver que cette fonction est de classe C^1 et comparer f ' et g.

c) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction f en utilisant ceux de la fonction g.

II. Application à un exemple

La fonction ϕ est ici définie sur $]0,\pi[$ par $\phi(x) = -2$.

a) Déterminer sur $]-\pi,+\pi[$, les fonctions h, g, f introduites précédemment. Représenter graphiquement ces fonctions sur l'intervalle $]-2\pi,2\pi[$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de h et en déduire ceux de g et ceux de f.

c) Ecrire les développements en série de Fourier des fonctions h, g, f, en précisant leurs sommes en tout point x.

III. Applications numériques

En utilisant ce qui précède, calculer les sommes des séries numériques suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail